INSTITUT NATIONAL DE LA STATISTIQUE
ET DES ÉTUDES ÉCONOMIQUES

CONCOURS POUR L'ADMISSION D'ÉLÈVES TITULAIRES STATISTICIENS ÉCONOMISTES
A L'ÉCOLE NATIONALE DE LA STATISTIQUE
ET DE L'ADMINISTRATION ÉCONOMIQUE

Mai 1985. — Option MATHÉMATIQUES

TROISIÈME COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

DURÉE : 2 heures

Le plan euclidien étant rapporté à un repère orthonormé d'axes Ox, Oy on considère la courbe (C) dont une représentation paramétrique est :

$$x = \frac{2t^2 + 12}{t^3 - 5t^2 + 6t - 9} \qquad y = \frac{t^3 + 6t}{t^3 - 5t^2 + 6t - 9}$$

1° On note Q : $Q(t) = t^3 - 5t^2 + 6t - 9$. Montrer que Q possède une racine réelle, une seule, qu'on appelle α, et que : $4 < \alpha < 4{,}1$. On évitera tout calcul de valeur approchée, par exemple en décomposant $Q(t)$ en la somme de deux termes dont l'un est $t^3 - 4t^2$.

Appliquer une fois la méthode de Newton (ou méthode de la tangente) et celle des parties proportionnelles (ou méthode de la corde) à l'intervalle [4; 4,1]. Démontrer qu'on obtient ainsi un encadrement de α par deux nombres décimaux qui seront arrondis à 10^{-4}.

2° Déterminer la limite, K, de $y(t) - \frac{\alpha}{2} x(t)$, quand t tend vers α. K sera d'abord déterminé sous forme littérale, puis on en déduira une valeur approchée en remplaçant α par sa meilleure valeur décimale approchée à 10^{-2} près.

3° Déterminer le signe de la fonction H : $H(t) = t^4 + 12t^2 - 42t + 36$. On évitera tout calcul de valeur approchée, par exemple en utilisant les racines du trinôme $12t^2 - 42t + 36$.

Déterminer les variations des fonctions $x(t)$ et $y(t)$ et résumer les résultats dans un unique tableau.

4° On prolonge la courbe (C) par le point A de coordonnées $(\lim_{t \to \infty} x(t), \lim_{t \to \infty} y(t))$. Montrer que la courbe possède une tangente en A et déterminer sa position par rapport à cette tangente.

Déterminer la position de (C) par rapport à la tangente au point B de paramètre 0.

5° Soient M_1 et M_2 les points de (C) ayant pour paramètres respectivement $-\sqrt{2}$ et $\sqrt{2}$. Déterminer pour chacun d'eux les valeurs de x, y et $\frac{y'}{x'}$ puis des valeurs approchées à 10^{-6} près de ces nombres.

Déterminer une équation implicite de la droite M_1M_2 (sans utilisation des valeurs approchées). Montrer que les tangentes à (C) en M_1 et M_2 se coupent sur l'axe Ox en un point T, dont on donnera l'abscisse.

6° Construire (C) en prenant 5 cm pour unité de longueur. On utilisera exclusivement les points et droites déjà obtenus.

7° La tangente au point M_1 (de paramètre $-\sqrt{2}$) coupe les tangentes en A et B respectivement en P et Q; en utilisant les valeurs approchées à 10^{-6} obtenues à la 5e question, déterminer des valeurs approchées des abscisses de P et Q.

Calculer une valeur approchée de l'aire intérieure au pentagone OAPQB.

8° Calculer la dérivée de $\frac{y'(t)}{x'(t)}$ pour les valeurs $t = \pm\sqrt{2}$. Conclure.